КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

8. Механические колебания
9. Волны

ГЛАВА 8

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ДВИЖЕНИЕ, КОТОРОЕ ПОВТОРЯЕТСЯ

Своеобразные движения, которые называются колебательными или просто колебаниями, всем хорошо известны. Они широко распространены в окружающей нас жизни. Колеблются ветки деревьев во время ветра, качели, отклоненные от вертикали, вагоны на рессорах при движении и т. д.

В этой книге колебания уже упоминались дважды.

В § 17 мы видели, что координаты x и y тела, равномерно движущегося по окружности, изменяются со временем так, что их значения периодически повторяются, или колеблются. В § 27 мы говорили, что тело, подвешенное на пружине, может совершать колебательное движение, если его толкнуть в вертикальном направлении (хотя может и не совершать его — оно может просто висеть на пружине, не двигаясь!).

Всякая система, которая может совершать (но может и не совершать!) колебательные движения, называется *колебательной системой.* Тело, скрепленное с пружиной,— одна из таких систем. С движением этой системы мы прежде всего и ознакомимся.

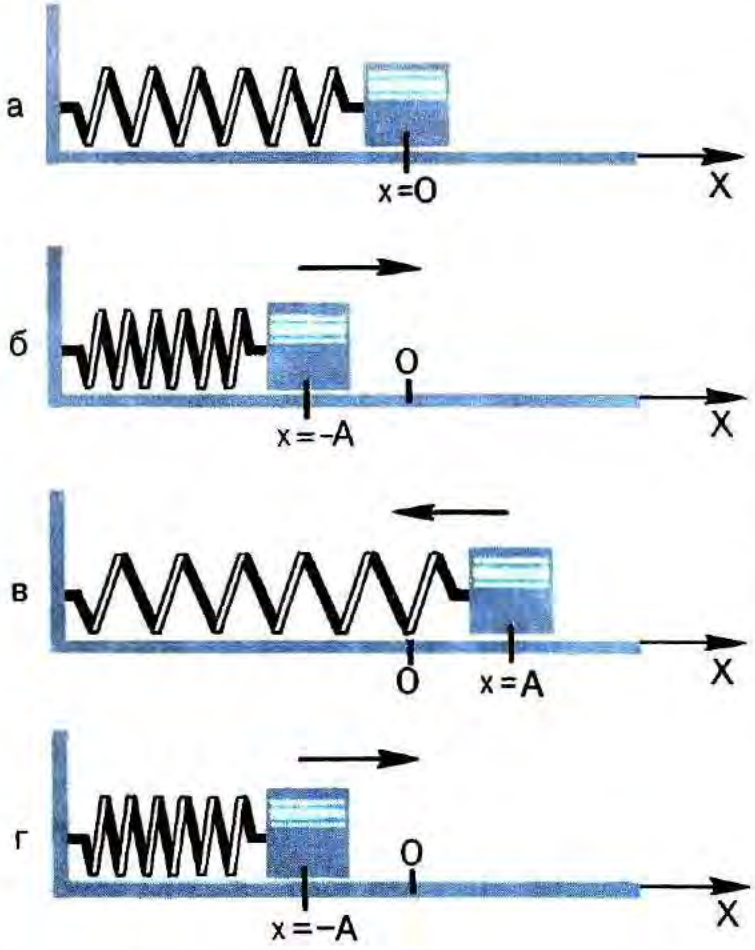
§ 53. КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА НА ПРУЖИНЕ

На рисунке 151, *а* показана пружина и скрепленное с ней тело. Пружина пока не деформирована (не сжата и не растянута), так что на тело сила упругости не действует. Будем считать, что сила трения тела об опору равна нулю. Сила тяжести уравновешена силой реакции опоры. Вся система находится в состоянии равновесия.

Направим координатную ось X вдоль опоры, а за начало отсчета примем центр тяжести тела в положении равновесия ($x=0$).

Отведем тело влево от положения равновесия на некоторое расстояние A (рис. 151, *б*). Пружина окажется сжатой, и на тело будет действовать сила упругости, направленная вправо. Отпустим тело и пружину. Тело станет двигаться с ускорением вправо и дойдет до положения равновесия, но не остановится в нем, а вследствие инерции перейдет его и отклонится вправо на расстояние, тоже равное A (рис. 151, *в*). Теперь пружина растянута, на тело действует сила, направленная влево, куда тело после мгновенной остановки и начнет двигаться. Оно снова пройдет через положение равновесия (теперь уже справа налево) и опять отклонится от него на расстояние A, т. е.

Рис. 151



вернется в точку, откуда оно начало свое движение (рис. 151, *г*). Завершено одно колебание, и начинается следующее, во всем на него похожее.

Мы видим, что в любой точке траектории колеблющегося тела сила упругости направлена к положению равновесия, т. е. противоположно отклонению от него. Эта сила пропорциональна отклонению x, и ее проекция на ось X равна: $(F_{упр})_x = -kx$. Отклонение тела от положения равновесия называют *смещением*.

Механические колебания, которые происходят под действием силы, пропорциональной смещению и направленной противоположно ему, называют *гармоническими колебаниями*.

Амплитуда колебания. Из описания гармонического колебания видно, что траектория такого колебательного движения — прямая. При этом колеблющееся тело не удаляется от положения равновесия на расстояние, большее, чем A. Это наибольшее (по модулю) отклонение тела от положения равновесия называется *амплитудой* колебания. Она зависит только от того, на сколько тело было отведено от положения равновесия перед тем, как его предоставили самому себе.

Период и частота колебаний. На то, чтобы совершить одно полное колебание, требуется определенное время. Продолжительность одного полного колебания называется *периодом* колебания. Обозначают период буквой T и выражают в секундах. Колебания характеризуются также *частотой* колебаний. Частота колебаний — это число колебаний в единицу времени. Обозначают частоту греческой буквой ν. За единицу частоты принимают частоту такого колебания, при котором в единицу времени совершается одно колебание. Эта единица называется герц (Гц): 1 Гц $=$ $=1\ с^{-1}$.

Между периодом колебания и его частотой связь, очевидно, такая же, как и между периодом обращения тела по окружности и частотой обращения (см. § 16):

$$\nu = \frac{1}{T};\ T = \frac{1}{\nu}.$$

Скорость и ускорение при колебательном движении. Как и другие движения, колебательное движение характеризуется скоростью и ускорением. При колебательном движении обе эти величины *изменяются* от точки к точке, от одного момента времени к другому. Так, в точках максимального отклонения от поло-

жения равновесия ($x=A$ и $x=-A$) скорость равна нулю — в этих точках тело останавливается, чтобы начать движение в обратном направлении. В точке равновесия скорость максимальная. Ускорение, наоборот, в точке равновесия равно нулю, потому что в этой точке сила равна нулю. В точках же, соответствующих максимальному отклонению от положения равновесия ($x=A$ и $x=-A$), ускорение максимальное, потому что в этих точках сила упругости максимальна. Итак, скорость и ускорение, как и координата, в колебательном движении изменяются периодически. Через каждый период T модуль и направление векторов скорости и ускорения повторяются.

Вопросы

1. Какое движение называется колебательным? В чем главное отличие его от других движений?

2. Что такое период колебаний? Что такое частота колебаний? Какова связь между ними?

3. Система колеблется с частотой 1 Гц. Чему равен период колебания?

4. В каких точках траектории колеблющегося тела скорость равна нулю? Ускорение равно нулю?

5. Какие величины, характеризующие колебательное движение, изменяются периодически?

6. Что можно сказать о силе, которая должна действовать в колебательной системе, чтобы она совершала гармонические колебания?

7. Какое перемещение совершит колеблющееся тело за один период? Чему равен путь, пройденный телом за это же время?

§ 54. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мы видели, что если тело, прикрепленное к пружине, было первоначально отклонено от положения равновесия на расстояние A, например, влево, то оно, пройдя через положение равновесия, отклонится вправо. И мы утверждали, что и вправо оно отклонится на расстояние A. Но откуда это следует? Почему отклонения вправо и влево при колебаниях непременно должны быть одинаковыми? Это, оказывается, следует из закона сохранения энергии.

Из предыдущей главы мы знаем, что потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины равна $\frac{kx^2}{2}$, где k — жесткость пружины и x — ее удлинение. В нашем примере (см. рис. 151) в крайнем левом положении удлинение пружины $x=-A$, следовательно, потенциальная энергия равна $\frac{kA^2}{2}$. Кинетическая энергия в этот момент равна нулю, потому что нулю равна скорость. Значит, потенциальная энергия $\frac{kA^2}{2}$ — это *полная механическая энергия* системы в этот момент.

Так как мы условились, что сила трения равна нулю, а другие силы уравновешены, то нашу систему можно считать замкнутой и ее полная энергия при движении не может измениться. Когда тело при своем движении окажется в крайнем правом положении ($x=A$), его кинетическая энергия снова будет равна нулю и полная энергия опять равна потенциальной. А полная энергия не может измениться.

Значит, она снова равна $\frac{kA^2}{2}$. Это и означает, что и вправо тело отклонится на расстояние, равное A.

В положении равновесия, напротив, потенциальная энергия равна нулю, потому что $x=0$ (пружина не деформирована!). В этом положении полная энергия тела равна его кинетической энергии $\frac{mv_m^2}{2}$, где m — масса тела и v_m — его скорость (она в этот момент максимальна!). Но эта кинетическая энергия тоже должна иметь значение, равное $\frac{kA^2}{2}$.

При колебательном движении происходит, следовательно, превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. В любой же точке между положениями равновесия и максимального отклонения тело обладает и кинетической энергией и потенциальной, но их сумма, т. е. полная энергия в любом положении тела, равна $\frac{kA^2}{2}$. *Полная механическая энергия W колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний:*

$$W=\frac{kA^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии следует интересное соотношение между амплитудой колебаний A и максимальной скоростью v_m колеблющегося тела (оно нам будет необходимо в дальнейшем).

Как мы видели,

$$\frac{mv_m^2}{2}=\frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{A^2}{v_m^2}=\frac{m}{k}, \text{ или}$$

$$\frac{A}{v_m}=\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Вопросы

1. В каких точках траектории колеблющееся тело обладает только потенциальной энергией?

2. В какой точке траектории колеблющееся тело обладает только кинетической энергией?

3. При данной амплитуде колебаний полная энергия колеблющегося тела есть величина постоянная (со временем не изменяется). Можно ли то же сказать о кинетической и потенциальной энергии?

4. Зависит ли энергия колеблющегося тела от его массы?

5. Чему равна полная энергия колеблющегося тела в произвольной точке траектории?

§ 55. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Как и для всякого движения, для колебаний нужно получить формулу, позволяющую решать основную задачу механики — определять координату в любой момент времени. Кроме того, поскольку колебания — движение периодическое, нужно уметь вычислять период колебаний.

Чтобы найти зависимость координаты колеблющегося тела от времени, нужно, как мы знаем, решить уравнение второго закона Ньютона. Но сила, действующая на колеблющееся тело, переменная, и решить уравнение обычным алгебраическим способом нельзя (об этом говорилось и в § 27).

Но мы все же найдем и формулу для координаты и формулу для периода, если рассмотрим вместо движения тела, скрепленного с пружиной, вполне сходное с ним движение.

Пусть маленький шарик M равномерно движется по окружности со скоростью v. Радиус окружности мы на этот раз обозначим буквой A.

Движение шарика по окружности — это тоже движение периодическое. Ведь шарик через определенный промежуток времени T (период обращения) оказывается в том же самом месте. Но это движение не колебательное, и оно не похоже на движение тела, скрепленного с пружиной: тело на пружине движется «туда-сюда», а шарик — только «туда», по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Рассмотрим, однако, не движение шарика, а движение его проекции на горизонтальный диаметр окружности. Вдоль диаметра направим координатную ось X с началом отсчета в центре O окружности (рис. 152). Из рисунка видно, что при движении шарика по окружности его проекция M' совершает колебания вдоль диаметра, т. е. вдоль оси X. Именно такое колебательное движение мы увидим, если станем смотреть на шарик «сбоку», поместив глаз в плоскости обращения. Ясно, что движение проекции — это точная геометрическая модель колебательного движения тела (его центра тяжести), скрепленного с пружиной. Центр окружности O здесь играет роль точки равновесия ($x=0$). Амплитуда колебания проекции M' равна радиусу A окружности. А период колебания T равен периоду обращения шарика по окружности.

Скорость движения проекции M' тоже «ведет себя» совершенно так же, как скорость тела, прикрепленного к пружине. В тот момент, когда шарик при своем движении проходит точку a (рис. 153), скорость его равна v и направлена параллельно оси X. В этот момент проекция M' проходит через центр окружности O и проекция v_x скорости по модулю равна v. Это максимальное значение скорости проекции M': $v_{xm}=v$. Когда шарик M проходит точку b, скорость шарика по модулю равна v, но направлена перпендикулярно оси X, так что проекция скорости равна нулю. Таким образом, в положении $x=0$ скорость максимальна, а в положении $x=A$ она равна нулю. Так же изменяется и скорость колеблющегося тела на пружине. Это подобие движения тела, прикрепленного к пружине, и проекции тела, равномерно движущегося по

Рис. 152

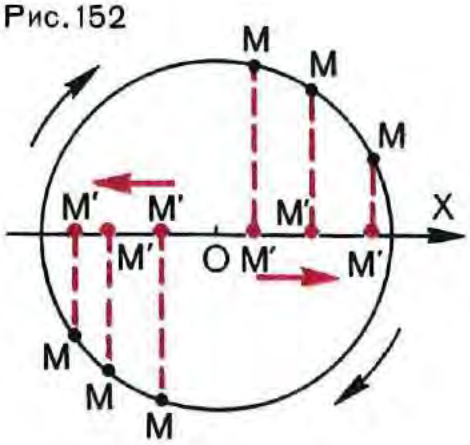


Рис. 153

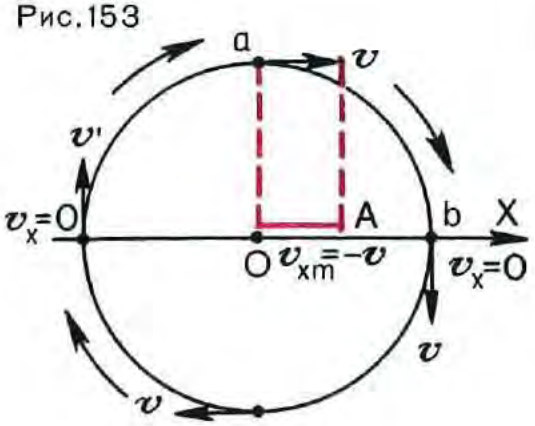
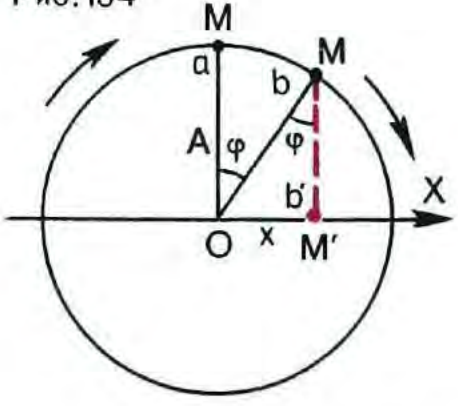


Рис. 154



окружности, позволяет нам получить формулы для координаты и периода колеблющегося тела.

Период колебаний. Период обращения шарика по окружности мы найдем, если разделим длину окружности $2\pi A$ на скорость движения v: $T=\frac{2\pi A}{v}$. Но T — это период колебания проекции M', а скорость v — это в то же время максимальная скорость движения проекции: $v_{xm}=v$. Следовательно, мы можем написать:

$$T=\frac{2\pi A}{v_{xm}}.$$

В предыдущем параграфе мы получили выражение для отношения амплитуды колебания к максимальной скорости: $\frac{A}{v_m}=\sqrt{\frac{m}{k}}$. Ввиду полного сходства колебаний проекции тела, равномерно движущегося по окружности, и тела, скрепленного с пружиной, мы можем написать для периода колебаний формулу:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (1)$$

Период колебаний тела, скрепленного с пружиной, тем больше, чем больше масса тела, и тем меньше, чем больше жесткость пружины. От амплитуды колебаний период колебаний не зависит.

Как изменяется координата колеблющегося тела со временем? Обратимся опять к движению шарика по окружности и к движению его проекции на горизонтальный диаметр (рис. 154). Пусть в какой-то момент времени шарик находится в точке a. Проекция его в этот момент проходит через центр окружности O. Проведем в точку a радиус. Через некоторый промежуток времени t шарик оказался в точке b, а его проекция в точке b', так что координата шарика равна x. Проведем радиус и в точку b. За время t шарик прошел путь $l=\overset{\frown}{ab}$, а его проекция совершила перемещение, равное x. При этом радиус, проведенный к шарику, повернулся на угол φ. Из треугольника Obb' находим, что $\frac{x'}{A}=\sin\varphi$, отсюда

$$x=A\sin\varphi. \qquad (2)$$

Угол φ — это центральный угол. А дуга, стягивающая центральный угол, как известно из геометрии, равна произведению угла на радиус окружности, поэтому мы можем написать: $l=A\varphi$. С другой стороны, $l=vt$, а $v=\frac{2\pi A}{T}$, так что для l мы получаем еще одно выражение: $l=\frac{2\pi A}{T}t$. Приравнивая оба выражения для l, находим:

$$A\varphi=\frac{2\pi A}{T}t,$$

или

$$\varphi=\frac{2\pi}{T}t.$$

Подставив это значение φ в формулу (2), получаем:

$$x=A\sin\frac{2\pi}{T}t. \qquad (3)$$

Эта формула показывает, как координата колеблющегося тела изменяется со временем. Это и есть решение основной задачи механики для колебательного движения.

Формулы (1) и (3) — основные формулы колебательного движения. Мы их получили для модели (геометрической) колебательного дви-

жения. Но ввиду того, что это очень точная модель, полученные формулы справедливы и для реального гармонического колебательного движения, в частности для колебаний тела, прикрепленного к пружине.

Вопросы

1. В чем состоит сходство движения тела, скрепленного с пружиной, и движения проекции тела, равномерно вращающегося по окружности?

2. От каких величин зависит период колебаний тела на пружине?

3. Как изменится период колебаний тела на пружине, если увеличить массу тела в 4 раза?

4. Как изменится период колебаний тела на пружине, если заменить пружину другой, с вчетверо большей жесткостью?

Задания

1. Выведите формулу для определения частоты колебаний тела, скрепленного с пружиной.

2. Напишите формулу (3) так, чтобы в нее входил не период T колебания, а частота ν колебаний.

Упражнение 31

1. Чему равна частота колебаний тела массой 100 г, прикрепленного к пружине, жесткость которой равна 40 Н/м?

2. Чему равна жесткость пружины, если скрепленное с ней тело массой 30 г совершает за 1 мин 300 колебаний?

3. Тело, прикрепленное к пружине, совершает колебания с некоторым периодом T.

Если увеличить массу тела на 60 г, то период колебаний удваивается. Какова первоначальная масса тела?

§ 56. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Рассмотренный нами пример колебательного движения тела, скрепленного с пружиной, показывает, что такое движение происходит, если: а) сила, действующая на тело в любой точке траектории, направлена к положению равновесия, а в самой точке равновесия равна нулю; б) сила пропорциональна отклонению тела от положения равновесия. Именно такой силой является сила упругости. Значит ли это, что возможны гармонические колебания только под действием силы упругости? Оказывается, нет. Всякая другая сила (или равнодействующая нескольких сил), удовлетворяющая условиям а) и б), заставляет тело совершать гармонические колебания. С одной такой колебательной системой, в которой действует не только сила упругости, мы и познакомимся.

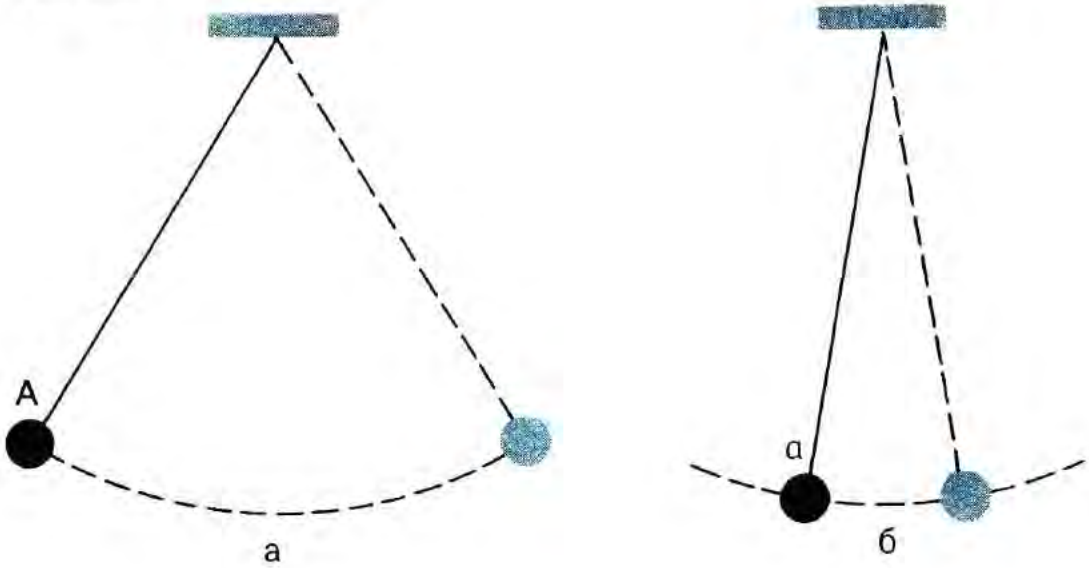
Математическим маятником называется подвешенный к тонкой нити груз, размеры которого много меньше длины нити, а его масса много больше массы нити. Это значит, что тело (груз) и нить должны быть такими, чтобы груз можно было считать материальной точкой, а нить невесомой.

Когда нить с подвешенным к ней грузом занимает вертикальное положение, маятник покоится. Это его положение равновесия (рис. 155). Если отвести маятник в сторону, например до положения A (рис. 156, a), он начнет совершать колебания.

На первый взгляд может показаться, что движение маятника

Рис. 155

Рис. 156



совсем не похоже на движение тела, скрепленного с пружиной. Ведь это тело колеблется по прямой, а груз на нити движется по дуге $\overset{\smile}{AB}$. Но если отклонить маятник на достаточно малый угол, например не до точки A, а до точки a (рис. 156, *б*), то дуга будет очень мало отличаться от прямой (от хорды). При малых углах отклонения колебания математического маятника становятся похожими на колебания тела, прикрепленного к пружине (комбинацию «тело — пружина» часто называют пружинным маятником). А причина сходства в том, что сходны силы, вызывающие колебания в обеих системах.

Сила, вызывающая колебания маятника. В положении равновесия (см. рис. 155) на подвешенный к нити груз действуют сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}_{упр}$ натянутой нити. Маятник покоится, значит, эти силы уравновешивают одна другую:

$$\vec{F}_т + \vec{F}_{упр} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Но вот маятник отклонен на малый угол α (рис. 157). На груз по-прежнему действуют силы $\vec{F}_т$ и $\vec{F}_{упр}$. Но теперь они не уравновешены. Их равнодействующая $\vec{F}$ направлена по касательной к дуге $\overset{\smile}{AE}$. Если угол α, как мы условились, мал, то дуга $\overset{\smile}{AE}$, по которой движется груз, очень мало отличается от полухорды AB. Поэтому можно считать, что груз маятника движется по хорде, вдоль которой мы направили координатную ось X.

Вместо равенства (1) мы должны теперь написать:

$$\vec{F} = \vec{F}_т + \vec{F}_{упр}. \qquad (2)$$

Запишем равенство (2) для проекций векторов сил на касательную к дуге $\overset{\smile}{AE}$. Но при малом угле α можно считать, что эти проекции есть в то же время проекции на ось X:

$$F_x = (F_т)_x.$$

Проекция F_x равнодействующей $\vec{F}$ равна проекции $(F_т)_x$ силы тяжести $\vec{F}_т$, так как проекция на касательную силы упругости $\vec{F}_{упр}$ равна нулю.

Из рисунка 157 видно, что $(F_т)_x$ по модулю равно $mg\sin\alpha$. Из треугольника OBA имеем $\sin\alpha = \frac{x}{l}$,

где x — отклонение груза от положения равновесия, l — длина подвеса. Тогда предыдущее выражение можно записать

$$F_x = -\frac{mg}{l}x. \qquad (3)$$

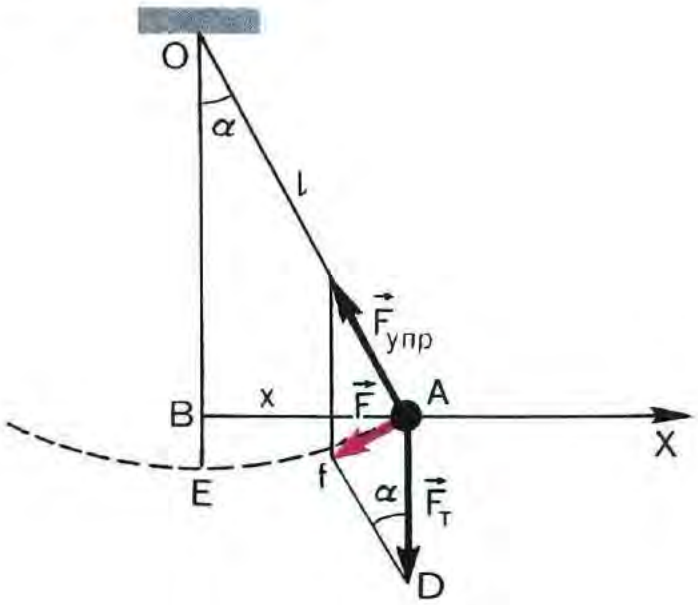
Знак «—» означает, что сила $\vec{F}$ направлена против смещения.

Период колебаний маятника. Сила $\vec{F}$ — это та сила, которая заставляет маятник колебаться. Из формулы (3) видно, что эта сила очень похожа на силу упругости, заставляющую колебаться пружинный маятник ($(F_{упр})_x = -kx$). Разница только в том, что вместо жесткости пружины k здесь стоит величина $\frac{mg}{l}$. Как и сила $\vec{F}_{упр}$, сила $\vec{F}$ пропорциональна отклонению x тела от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению $\left(F_x = -\frac{mg}{l}x\right)$. В этом и состоит причина сходства движения математического и пружинного маятников. Одинаковые причины приводят к одинаковым следствиям. В таком случае значение периода колебаний математического маятника мы получим, если в формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ вместо k подставим $\frac{mg}{l}$. Тогда период T колебаний математического маятника будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) видно, что период колебаний математического маятника не зависит от массы подвешенного груза и амплитуды колебаний (если она мала!).

Рис. 157



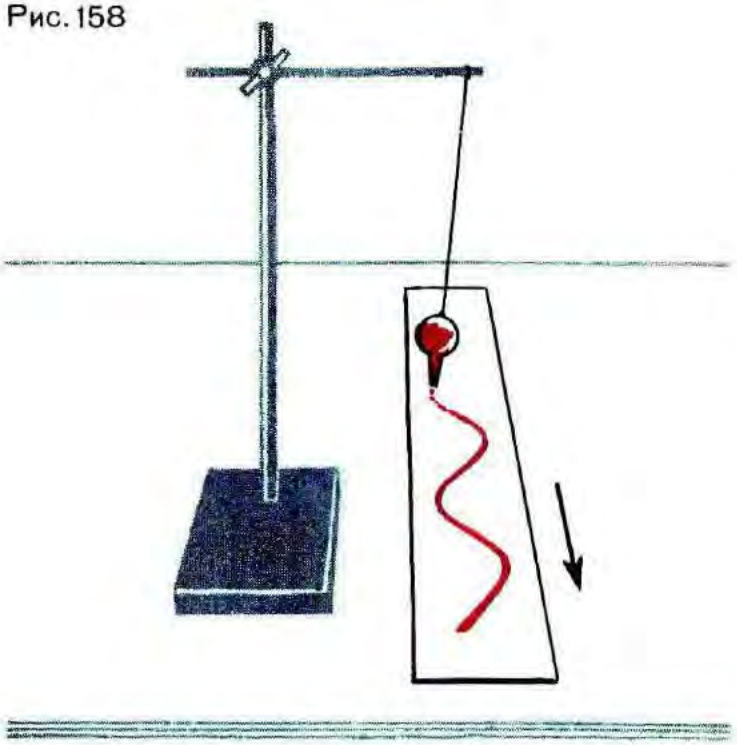
В данном месте Земли, где ускорение свободного падения g есть постоянная величина, период колебания маятника определяется только длиной его подвеса.

Поскольку любой маятник имеет вполне определенный период колебаний, маятники используют для регулировки хода часов. Применяются маятники с периодами колебаний 2 с (большие маятниковые часы), либо 1 с («ходики»).

Маятник находит также важное применение в геологической разведке. Известно, что в разных местах земного шара значения g различны. Различны они потому, что Земля — не вполне правильный шар. Кроме того, в тех местах, где залегают плотные породы, например некоторые металлические руды, значение g аномально высоко. Точные измерения g с помощью математического маятника иногда позволяют обнаружить такие месторождения.

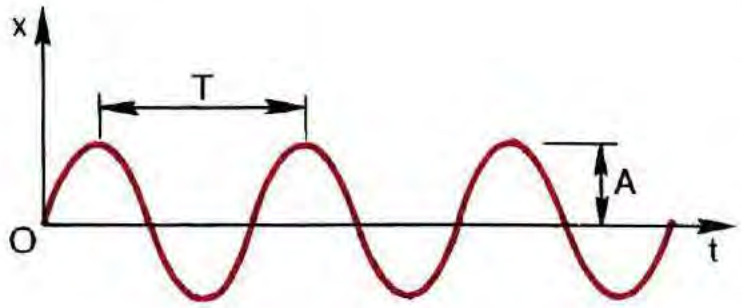
График гармонического колебания. В предыдущем параграфе мы получили формулу, выражающую зависимость координаты колеблющегося тела от времени. Она относится не только к пружинному, но и к математическому маятнику.

Рис. 158



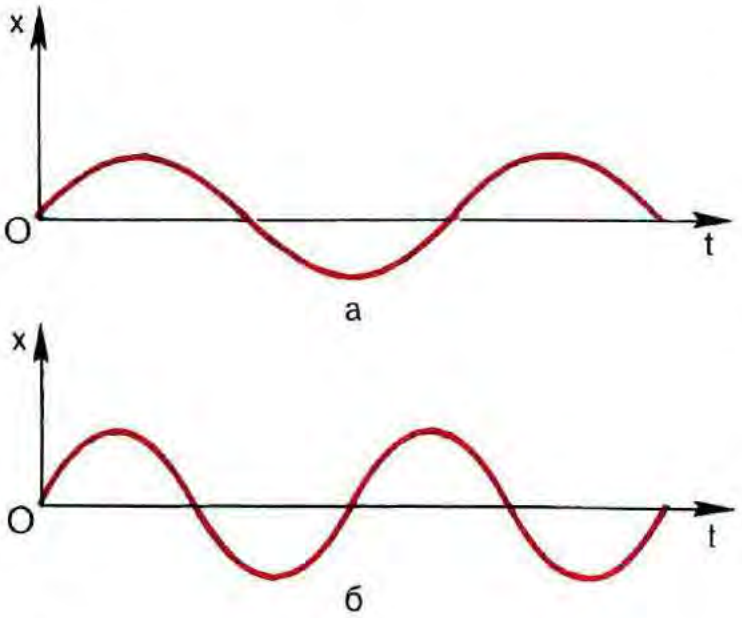
Более наглядное представление о характере гармонического колебания можно получить из графика такого движения. Изобразить такой график можно «поручить» самому колеблющемуся телу. Для этого к нему прикрепляют какое-нибудь легкое пишущее устройство (карандаш, перо), а под ним помещают бумажную ленту. Если во время колебаний маятника ленту двигать с некоторой постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном направлению колебаний, то на ней появится кривая, каждая точка которой соответствует положению пера, а значит, и тела в различные моменты времени. На рисунках 158 и 159 показаны устройства для получения графика и сам график. Кривая, графически изображающая зависимость координаты от времени, называется *синусоидой*. Ранее мы установили, что координата x изменяется по закону *синуса* (формула 3, § 55).

Рис. 159



Тот же результат (синусоиду) можно получить совсем просто. Возьмите в руки мел и чертите им на доске вверх-вниз, одновременно двигаясь вдоль доски (по возможности равномерно).

Рис. 160

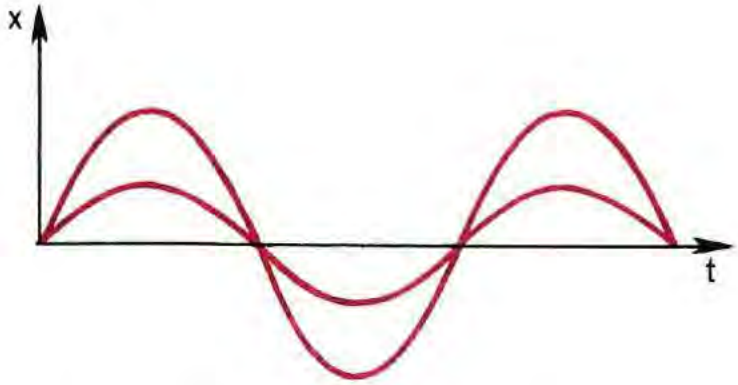


Вычерчивая таким способом график колебаний, мы, как говорят, «развертываем» колебание во времени. Равномерное движение бумажной ленты как бы символизирует течение времени. Такие графики-развертки очень наглядно показывают основные характеристики колебательного движения — амплитуду, период, а значит, и частоту (см. рис. 159). По графикам колебаний удобно сравнивать различные виды колебаний. На рисунке 160, *а, б,* например, показаны два колебания с одинаковой амплитудой, но с разными частотами. На рисунке 161 мы видим два колебания с одина-

ковыми частотами, но с разными амплитудами.

Напомним еще раз, что формула (3) и графики на рисунках 156—159 относятся к случаям, когда угол отклонения маятника от вертикали (т. е. от положения равновесия) мал. Он не должен превышать 5—10°.

Рис. 161



Вопросы

1. Какие силы действуют при движении математического маятника?

2. Какими должны быть нить и подвешенный к ней груз, чтобы маятник можно было считать математическим?

3. При каких отклонениях от положения равновесия колебания маятника будут гармоническими?

4. Чему равен период колебаний маятника с длиной подвеса 1 м?

5. Как изменится период колебаний маятника, если заменить груз другим, по массе вдвое меньшим?

6. Как изменится период колебаний маятника, если уменьшить длину подвеса в 4 раза?

7. Справедлива ли формула (3) предыдущего параграфа для математического маятника?

Упражнение 32

1. Маятник совершает 24 колебания за 30 с. Чему равны период и частота его колебаний?

2. Длина подвеса маятника 98 м. С какой частотой он колеблется? Чему равна амплитуда колебаний маятника, если он отклонен от вертикали на 5°?

3. Маятник, который на Земле совершал свободные колебания с частотой 0,5 Гц, был доставлен космонавтами на Луну. С какой частотой маятник будет колебаться на поверхности Луны, где ускорение свободного падения в 6 раз меньше, чем на Земле?

4. Два маятника отклонены от своих положений равновесия и одновременно отпущены. Первый маятник с длиной подвеса 4 м совершил за некоторый промежуток времени 15 колебаний. Второй за это же время совершил 10 колебаний. Какова длина второго маятника?

§ 57. КОЛЕБАНИЯ И ВНЕШНИЕ СИЛЫ

Мы познакомились с двумя колебательными системами — с пружинным и математическим маятниками. Пружинный маятник — это система «тело — пружина». Математический маятник — система «нить — груз — Земля». В этих системах, когда они выведены из состояния равновесия, возникают колебания, очень похожие друг на друга — гармонические колебания. При этом мы считали, что колебательное движение определяется в них *только* силами, действующими в самой системе. В пружинном маятнике — это сила упругости деформированной пружины. В математическом маятнике — это сила упругости натянутой нити и сила тяжести. Сходством этих сил и объясняется сходство

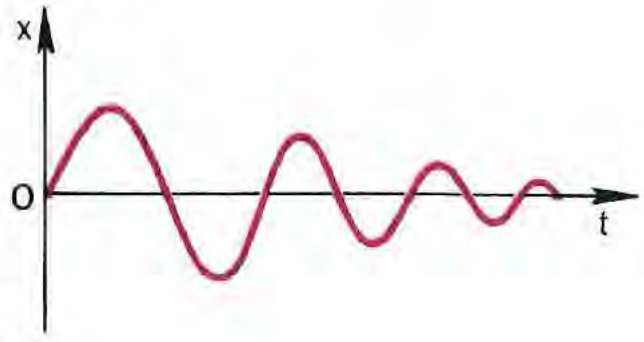
движений в обеих системах. Внешние силы, в частности сила трения, на системы не действуют.

Колебания в таких системах, не подверженных действию внешних сил, называются *свободными*. Иногда их называют также *собственными* колебаниями.

Свободные колебания — «вечные» колебания. Колебательные системы, на которые не действуют внешние силы, — это замкнутые системы. А в замкнутой системе полная энергия сохраняется, происходит только превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Энергия колебаний определяется квадратом амплитуды колебаний. Поэтому свободные колебания — это колебания с *постоянной амплитудой*. Маятник, выведенный из положения равновесия, должен колебаться вечно!

Влияние силы трения. Затухание колебаний. Иногда действительно можно наблюдать колебания, длящиеся поразительно долго. Например, длинный маятник, отклоненный на малый угол, может в течение многих часов совершать колебания с постоянной амплитудой. Однако, как бы долго ни продолжались свободные колебания маятника, он в конце концов все-таки останавливается, колебания, как говорят, затухают. «Виновата» в этом сила трения, которая в реальных земных условиях действует на все, что движется.

Рис.162



Сила трения, как мы знаем, направлена в сторону, противоположную движению, поэтому она совершает отрицательную работу. А мы знаем (см. § 49), что если работа отрицательна, то полная механическая энергия уменьшается. Уменьшение энергии означает уменьшение амплитуды. В этом уменьшении амплитуды и состоит затухание колебаний. *Затухание колебания — это колебания с уменьшающейся амплитудой.* Чем сила трения больше, тем быстрее уменьшается амплитуда. На рисунке 162 показан график такого затухающего колебания. Если сила трения достаточно велика, колебания вообще не возникают. Отклоненный от положения равновесия маятник просто постепенно возвращается в это положение.

Вынужденные колебания. Затухающие колебания нельзя считать свободными колебаниями, поскольку свободные колебания — это колебания с постоянной амплитудой.

Рассмотрим теперь случай, когда на колебательную систему действует внешняя сила, но не постоянная сила трения, а некоторая *периодически изменяющаяся* сила. Приведем такой пример. Стержень с небольшим изгибом (рис. 163) может вращаться в подшипниках с помощью рукоятки. К изгибу стержня прикреплен пружинный маятник. Направляющая щель дает возможность маятнику двигаться только вверх-вниз. Будем вращать стержень с некоторой постоянной частотой. Тогда на пружинный маятник будет действовать сила, которая изменяется периодически с той частотой, с которой вращается стержень. Как будет двигаться груз на пружине? Пружина с грузом — это колебательная система. У нее «свой» период колебаний

Рис. 163

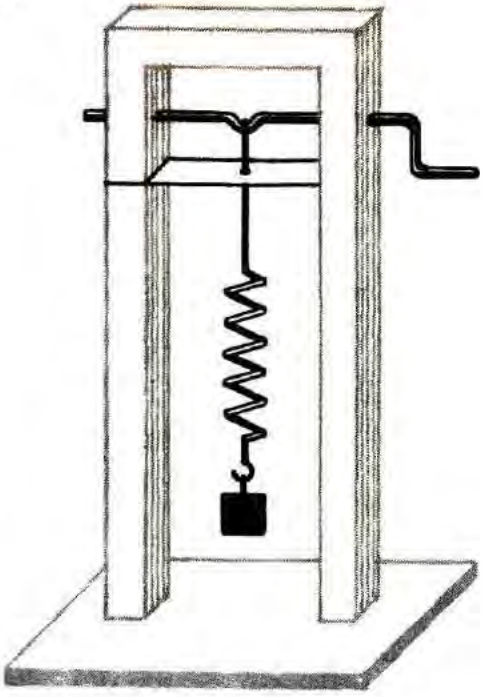
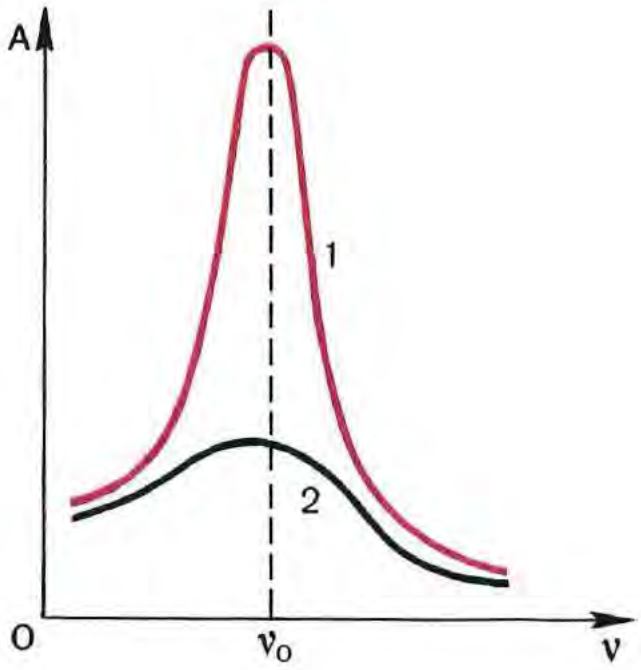


Рис. 164



$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ и «своя» частота $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (этот период и эту частоту обычно называют собственным периодом, собственной частотой). Но сила, которая создается при вращении рукоятки, будет «навязывать» маятнику свою частоту, свой период колебаний. Колебания, которые совершает колебательная система при воздействии внешней периодической силы, называются *вынужденными колебаниями,* а периодическая сила, вызывающая такие колебания, называется *вынуждающей силой.* Итак, колебательная система, на которую действует внешняя периодическая сила, совершает вынужденные колебания. Частота вынужденных колебаний (период) равна частоте (периоду) вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний при данной частоте вынуждающей силы не изменяется, даже если на систему, кроме вынуждающей силы, действует и сила трения. Потеря энергии из-за трения восполняется за счет работы вынуждающей силы.

Резонанс. Будем изменять частоту вынуждающей силы. В нашем примере (см. рис. 163) это можно сделать, изменяя скорость вращения рукоятки. Опыт покажет, что амплитуда вынужденных колебаний существенно зависит от частоты вынуждающей силы. Изменяя частоту вынуждающей силы и измеряя амплитуду колебаний груза на пружине, мы увидим, что, когда частота вынуждающей силы приближается к *собственной* частоте пружинного маятника, амплитуда колебаний резко возрастает. Амплитуда колебаний максимальна, когда частота вынуждающей силы равна собственной частоте маятника. При дальнейшем росте частоты вынуждающей силы амплитуда уменьшается. Это *явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при равенстве частот вынуждающей силы и собственной частоты колебательной системы называется резонансом.* На рисунке 164 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

Амплитуда достигает максимума при определенном значении частоты $\nu = \nu_0$, где ν_0 и есть собственная частота колебательной системы. На резкость максимума сильно влияет сила трения. Кривая *1* соответствует малой силе трения: максимум очень резкий. Кривая *2* соответствует большой силе трения: резкого максимума нет.

В чем причина явления резонанса? Почему растет амплитуда колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к частоте собственной?

Совпадение частот означает, что сила упругости в самой системе действует «в такт» с вынуждающей силой. Если сила упругости и вынуждающая сила в какие-то моменты действуют в одном направлении, то они складываются и их действие усиливается. И даже если вынуждающая сила мала, она приведет к росту амплитуды. Ведь эта малая сила добавляется к силе упругости пружины каждый период.

Явление резонанса может быть полезным, поскольку оно позволяет получить даже с помощью малой силы большое увеличение амплитуды колебаний. С другой стороны, резонанс может оказаться вредным и даже опасным. Если, например, на фундаменте установлена машина, в которой какие-нибудь части совершают периодические движения, то они передаются фундаменту и он будет совершать вынужденные колебания. Фундамент — это тоже колебательная система со своей собственной частотой. И если частота периодических движений совпадет с собственной частотой фундамента, то амплитуда его колебаний может возрасти настолько, что это приведет к его разрушению. Известны случаи, когда мосты разрушались при прохождении по ним «в ногу» военных отрядов, потому что случайно собственная частота колебаний моста оказывалась равной частоте солдатского шага. Поэтому с опасными результатами резонанса нужно бороться, т. е. его не допускать. Для этого нужно заранее рассчитать частоты колебаний машин, фундаментов, средств транспорта и т. д., с тем чтобы при обычных условиях их эксплуатации резонанс не мог наступить.

С явлением резонанса мы встречаемся и в повседневной жизни. Если в комнате задребезжали оконные стекла при проезде по улице тяжелого грузовика, то это значит, что собственные частоты колебаний стекла совпали с частотой колебаний машины.

Вопросы

1. Что такое вынужденные колебания? При каких обстоятельствах они возникают? С какой частотой происходят вынужденные колебания?

2. В чем состоит явление резонанса?

3. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний?

4. Какова роль силы трения при вынужденных колебаниях? Приводит ли сила трения к затуханию колебаний?

Упражнение 33

1. К концу пружины маятника, груз которого имеет массу 1 кг, приложена переменная сила, частота колебаний которой равна 16 Гц. Будет ли при этом наблюдаться резонанс, если жесткость пружины 400 Н/м?

2. Период собственных вертикальных колебаний железнодорожного вагона равен 1,25 с.

На стыках рельсов вагон получает периодические удары, вызывающие вынужденные колебания вагона. При какой скорости поезда возникнет резонанс, если длина каждого рельса между стыками 25 м?

САМОЕ ВАЖНОЕ В ВОСЬМОЙ ГЛАВЕ

В природе и технике большую роль играют *колебательные системы,* т. е. тела и устройства, которые, будучи выведены из состояния равновесия, совершают как бы «сами по себе» колебательное движение. Если при этом на систему не действуют внешние силы, эти колебания называются *свободными* или *собственными.*

Механическое колебательное движение — это движение, при котором координата колеблющегося тела, его скорость и ускорение повторяются через определенный промежуток времени, называемый *периодом* колебаний, или, что одно и то же, повторяются с определенной *частотой.* Между периодом T и частотой ν существует связь:

$$T=\frac{1}{\nu};\ \nu=\frac{1}{T}.$$

Период колебаний и частота колебаний пружинного маятника определяются соответственно формулами:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ \text{ и }\ \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период T колебаний и частота ν колебаний математического маятника определяются формулами:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\ .$$

Сила трения, которую нужно считать внешней силой, вызывает постепенное уменьшение амплитуды колебаний. Такие колебания называют *затухающими* колебаниями.

Если внешней силой, приложенной к системе, является периодически изменяющаяся сила, то система совершает *вынужденные* колебания. Частота вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы. При равенстве частоты вынуждающей силы и частоты собственной колебательной системы происходит резонанс — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний.