

Задачи

22 октября 2018 г.

1 Точечная линза

Для точечной линзы массы M (её еще иногда называют линзой Шварцшильда) и точечного источника выпisać уравнение линзы.

$$\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2 D_L \theta} \frac{D_{LS}}{D_S} \quad \text{1} \quad (1.1a)$$

Или, если ввести радиус Эйнштейна $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (1.1b)$$

Вывести/получить следующие величины:

- Поверхностная плотность $\Sigma(\vec{\xi})$, где $\vec{\xi}$ - это прицельный параметр в плоскости линзы

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz = \dots \quad (1.2)$$

- Положения изображений

Рассмотрим уравнение (1.1b). Разделим обе части на θ_E и введём две новые переменные: $y = \beta/\theta_E$ (координата в плоскости источника) и $x = \theta/\theta_E$ (координата в плоскости линзы), откуда получим:

$$y = x - \frac{1}{x} \quad (1.3)$$

¹Это естественным образом следует из уравнения линзы в общем случае и выражения для угла отклонения, в котором прицельный параметр равен $\xi = D_L \theta$.

Это квадратное уравнение относительно x . Решая его, получаем два возможных положения изображений в плоскости линзы:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right] \quad (1.4)$$

Таким образом, в случае точечной линзы изображений всегда будет два – одно внутри кольца Эйнштейна и одно снаружи.

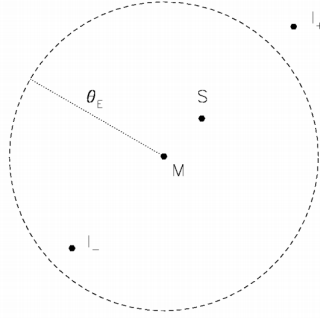


Рис. 1: Расположение изображений в случае точечного источника

- Усиление изображений μ

Усиление μ – это отношение размера изображения к размеру источника (отметим, что в этой задаче источник и изображение точечные, так что под размером понимается расстояние от оптической оси до объекта). Из курса математического анализа известно, что якобиан матрицы перехода от координат в плоскости источника к координатам в плоскости линзы –

$$\det A = \left| \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \right| = \left| \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right| \quad (1.5a)$$

по геометрическому смыслу совпадает с таким отношением. В нашем случае (осевая симметрия) запись упрощается:

$$\det A = \frac{y}{x} \frac{\partial y}{\partial x} \stackrel{(1.3)}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 - \left(\frac{1}{x} \right)^4 \quad (1.5b)$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{1}{\det A} = \left[1 - \left(\frac{1}{x} \right)^4 \right]^{-1} = \left[1 - \left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^4 \right]^{-1}. \quad (1.5c)$$

- Линзирующий потенциал ψ

По определению ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\theta} \psi = \vec{\alpha}, \quad (1.6a)$$

где угол отклонения луча в гравитационном поле

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|^2}. \quad (1.6b)$$

Отметим, что здесь $\vec{\alpha}$, во-первых, векторная величина, во-вторых, масштабирована множителем $\frac{D_{LS}}{D_S}$.

Воспользуемся также тем фактом, что

$$\nabla \ln |\vec{\theta}| = \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|^2}, \quad (1.6c)$$

откуда (и из (1.6d)) видно, что

$$\psi = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \ln |\vec{\theta}|. \quad (1.6d)$$

- Запаздывание (time delay) между двумя изображениями как функция положения источника

2 Сингулярная изотермическая сфера

Распределение плотности сингулярной изотермической сферы описывается

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}, \quad (2.1)$$

где σ_v - это некоторая характеристика лучевой дисперсии скоростей звезд в галактике. Основываясь на уравнении (2.1) убедиться, что поверхностная плотность описывается выражением

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \rho(\sqrt{\xi^2 + z^2}) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi}, \quad (2.2)$$

а угол Эйнштейна -

$$\Theta_E = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s}. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) в (2.2), получаем:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\xi^2 + z^2} = \frac{\sigma_v^2}{\pi G} \frac{1}{\xi} \left[\arctan \frac{z}{\xi} \right]_0^\infty = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi}, \quad (2.4)$$

Для того, чтобы получить выражение (2.3), вспомним, из каких соображений получается угол Эйнштейна. Масса сферы с поверхностной плотностью (2.2):

$$M(\xi) = \int \Sigma(\xi) d^2\xi = \int_0^\xi \frac{\sigma_v^2}{2G\xi'} 2\pi\xi' d\xi' = \frac{\pi\sigma_v^2}{G} \xi \quad (2.5)$$

Угол отклонения луча в поле тела массой $M(\xi)$ не зависит от прицельного параметра ξ и равен

$$\alpha(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi} = 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2}, \quad (2.6)$$

откуда (и из уравнения для линзы $\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S}\alpha \equiv 0$):

$$\theta_E = 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S} \quad (2.7)$$

Получить/вывести (в произвольном порядке):

- отношение поверхностной плотности к критической (convergence κ)

Напомним, что критической поверхностной плотностью Σ_{cr} называется такая поверхностная плотность, при которой угол отклонения (уже масштабированный) $\alpha(\theta) = \theta$.

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_{LS}D_L} \quad (2.8a)$$

По смыслу своему это соответствует плотности при некотором значении

$$\xi_0 = D_L \theta_E = 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S} D_L. \quad (2.8b)$$

Тогда

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi} \frac{\xi_0}{\xi} = \frac{\xi_0}{\xi} \frac{\sigma_v^2}{2G} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{c^2}{\sigma_v^2} \frac{D_S}{D_{LS}D_L} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\xi} \Sigma_{cr}. \quad (2.8c)$$

Наконец, если ввести относительные координаты $|x| = \theta/\theta_E$ ²:

$$\kappa = \frac{\Sigma(\xi)}{\Sigma_{cr}} = \frac{\xi_0}{2\xi} = \frac{\theta_E}{2\theta} = \frac{1}{2|x|}. \quad (2.8d)$$

- линзирующий потенциал ψ

Учтём следующее свойство:

$$\Delta\psi = 2\kappa(x) \quad (2.9a)$$

Используя равенство (2.8d) и известное соотношение $\Delta r = \frac{1}{r}$:

$$\psi(x) = |x| \quad (2.9b)$$

- сдвиг (shear γ)

Условимся предварительно для краткости обозначать вторые производные потенциала как

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \psi_{ij} \quad (2.10)$$

Сразу заметим, что

$$\Delta\psi \equiv \psi_{11} + \psi_{22} = 2\kappa(x) \Leftrightarrow \kappa(x) = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22}) \quad (2.11)$$

Напомним, что $\vec{x} = \vec{\theta}/\theta_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - это, вообще говоря, векторная величина (данное подразумевалось и раньше, но внимание на этом не акцентировалось, поскольку наличие осевой симметрии избавляло нас от возможного недопонимания; просим прощения у пунктуальных читателей). Из выражения (2.9b) следует, что

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \nabla\psi = \nabla|x| = \frac{\vec{x}}{|x|} \quad (2.12a)$$

Уравнение линзы (записанное теперь уже в векторном виде):

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\alpha} \mid : \theta_E \quad (2.12b)$$

²Это, вообще говоря, векторная величина.

или, переходя к относительным координатам $x = \theta/\theta_E$ и $y = \beta/\theta_E$

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}. \quad (2.12c)$$

Продифференцируем его по $\vec{x}$ и сразу напомним, что $\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}$ есть не что иное, как матрица Якоби перехода от координат $\vec{x}$ к $\vec{y}$:

$$A = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij} - \psi_{ij} \quad (2.12d)$$

Напомним, что определитель этой матрицы равен усилению изображений μ . Однако это – не единственное полезное свойство матрицы перехода. Для описания искажения изображений источников в плоскости линзы используется следующий подход: из матрицы A вычитается её изотропная часть

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{1}{2} \text{tr} A \cdot I \right)_{ij} &= \delta_{ij} - \psi_{ij} - \frac{1}{2} (1 - \psi_{11} + 1 - \psi_{22}) \delta_{ij} = \\ &= -\psi_{ij} + \frac{1}{2} (\psi_{11} + \psi_{22}) \delta_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) & -\psi_{12} \\ -\psi_{21} & \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12e)$$

Эта бесследовая матрица называется *матрицей сдвига*.

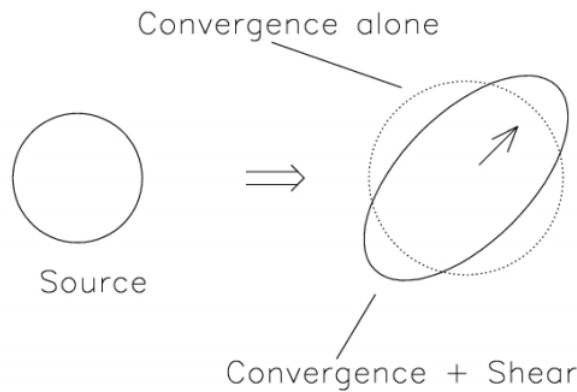


Рис. 2: К описанию конвергенции и сдвига

Введём *псевдо-вектор сдвига* $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ в плоскости линзы (вообще говоря, это тензорная величина). Определим его компоненты как:

$$\gamma_1(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \quad (2.12f)$$

$$\gamma_2(\vec{x}) = \psi_{12} = \psi_{21} \quad (2.12g)$$

Сдвигом называется модуль этого вектора. В модели сингулярной изотермической сферы он равен

$$\gamma = |\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{12}) \stackrel{(2.11)}{\equiv} \kappa(x) \quad (2.12h)$$

- усиление изображений

Отметим, что

$$\frac{1}{2}tr A = \left[1 - \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22}) \right] \delta_{ij} \equiv (1 - \kappa) \delta_{ij} \quad (2.13a)$$

Используя понятия конвергенции κ и сдвига γ , а так же (2.12e), определитель матрицы Якоби можно записать как

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.13b)$$

Тогда усиление изображений в модели сингулярной изотермической сферы равно

$$\mu = \frac{1}{det A} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2} = \frac{1}{(1 - 2\kappa + \kappa^2) - \kappa^2} = \frac{1}{1 - 2\kappa}, \quad (2.13c)$$

или, если вспомнить выражение (2.8d),

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{1}{|x|}} = \frac{|x|}{|x| - 1} \quad (2.13d)$$

- отношение усиления изображений

Обратим внимание на положение изображений в этой модели. Воспользуемся ранее выведенным уравнением для линзы:

$$y = x - \frac{x}{|x|} \quad (2.12c)$$

Проанализировав его с учётом того, что $x > 0, y > 0$, получим, что при $y < 1$ существует два решения этого уравнения: $x = y \pm 1$, что соответствует двум изображениям по разные стороны от оси симметрии. Если же $y > 1$, то решение только одно $x = y + 1$. Нас интересует первый случай. Из (2.13d) при $y < 1$:

$$\mu_+ = \frac{y + 1}{y} = 1 + \frac{1}{y}, \quad (2.14a)$$

$$\mu_- = \frac{|y - 1|}{|y - 1| - 1} = \frac{1 - y}{1 - y - 1} = \frac{1 - y}{y} = 1 - \frac{1}{y} \quad (2.14b)$$

Откуда отношение усиления изображений равно

$$\left| \frac{\mu_+}{\mu_-} \right| = \frac{1 + y}{1 - y} \quad (2.14c)$$

- запаздывание (time delay) между двумя изображениями как функция положения источника
- запаздывание между двумя изображениями как функция расстояния между изображениями и отношения усиления