

Гравитационное линзирование

mipt

23 ноября 2023 г.

АК: В тексте есть активные ссылки. По мере формирования этого документа их стиль изменится.

Содержание

1	Космологический ликбез	2
1.1	Красное смещение	2
1.2	Закон Хаббла и расширение Вселенной	2
1.3	Расстояния в космологии	3
1.3.1	Угловое расстояние по диаметру	3
1.4	Тестовое задание	4
1.5	Упражнение	4
2	Формализм	5
2.1	Введение	5
2.2	Упражнение	5
2.3	Классификация ГЛ	5
2.4	Гравитационный потенциал	5
2.5	Упражнения	5
2.6	Углы и расстояния	5
2.7	Уравнение линзы	6
2.8	Точечная линза	6
2.9	Радиус Эйнштейна	6
2.10	Поверхностная плотность	6
2.11	Критическая плотность	6
2.12	Упражнения	7
3	Моделирование	7
3.1	Решение уравнения линзы	7
3.2	Уточнение	7
3.3	Программирование – 1	7
3.4	Усиление изображений	8
3.5	Микролинзирование	8
3.6	Упражнения	9
3.7	Программирование – 2	9
3.8	Пояснение	9
4	Планы на будущее	9

1 Космологический ликбез

Этот раздел не претендует на полноту изложения. Для понимания космологических концепций необходимо глубокое осмысление представленного материала, которое, однако, требует значительного времени. Поэтому необходимые темы освещены лишь поверхностно.

1.1 Красное смещение

Так называется явление, при котором длина волны электромагнитного излучения для наблюдателя увеличивается относительно длины волны излучения, испущенного источником. Наиболее заметное проявление красного смещения — сдвиг линий и других деталей в спектре источника в сторону больших длин волн, например, для видимого света — в сторону красного участка спектра (обратное явление той же природы, при котором длина волны излучения уменьшается, называется синим смещением). Безразмерная величина, которая характеризует изменение длины волны, определяется как

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\lambda_o}{\lambda_s} - 1, \quad (1.1)$$

где λ_s и λ_o — длины волн в системах отсчёта источника и наблюдателя соответственно.

Красное смещение может быть вызвано тремя причинами: лучевой скоростью источника, разностью гравитационных потенциалов в точках, где располагаются источник и наблюдатель, и расширением Вселенной (оно называется соответственно доплеровским z_D , гравитационным z_g или космологическим z_c). Подробнее: [красное смещение](#).

Вспомним про эффект Доплера. Для движущегося источника излучения, скорость v которого много меньше скорости света c , нетрудно получить следующее выражение:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = 1 + \frac{v}{c} \Rightarrow z \stackrel{(1.1)}{=} \frac{v}{c} \quad (1.2)$$

В случае движущегося относительно источника наблюдателя выражение для красного смещения будет уже другим, но не сильно отличающимся от (1.2). Более подробный вывод см. [здесь](#).

Понятие относительной скорости имеет смысл только при $z \ll 1$, так что существование далёких источников с $z > 1$ не является каким-либо нарушением специальной теории относительности (цитата из Weinberg 2008).

Если источник движется относительно наблюдателя с релятивистской скоростью, то:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (1.3)$$

Это же выражение верно для случая движущегося наблюдателя с релятивистской скоростью относительно источника (вывод см. [здесь](#)).

В космологии красное смещение используется и как мера времени, и как мера расстояния: подразумевается, соответственно, время и расстояние, которое должен был пройти свет, двигаясь от наблюдателя к источнику, чтобы приобрести такое космологическое красное смещение. Удобство этого подхода состоит в том, что z определяется напрямую из наблюдений, в то время как соответствующее ему время и расстояние зависят от параметров используемой космологической модели.

1.2 Закон Хаббла и расширение Вселенной

К 1929 году Э. Хаббл с коллегами установил для сравнительно близких к нам галактик приблизительно линейную зависимость радиальной скорости v_r от расстояния d до них:

$$v_r = H_o d \quad (1.4)$$

Лучевая скорость определялась по красному смещению, а расстояние — при помощи зависимости "период-светимость" переменных звёзд, которые называются цефеидами (Hubble 1929, см. [здесь](#)). Коэффициент H_o называется постоянной Хаббла, его современное значение близко к 70 (кмс/с)/Мпк.

Такое "разбегание" во всех направлениях окружающих нас объектов можно интерпретировать как расширение космического пространства на больших масштабах. Следует понимать, что этот закон верен для любой точки пространства: для наблюдателя в галактике на расстоянии d от нас мы удаляемся от него с такой же скоростью v , с какой он удаляется от нас. Таким образом, Вселенная расширяется во всех точках пространства одновременно (подробнее см. [закон Хаббла](#) и [космологический принцип](#), а также [здесь](#)).

При этом важно понимать, что на малых масштабах гравитация играет принципиальную роль: например, галактика Андромеды и некоторые другие (сравнительно недалёкие), двигаются по направлению к нам и, соответственно, демонстрируют синее смещение.

Комментарий

Представим Вселенную как увеличивающийся шар. Пусть в момент времени $T = 0$ у неё был радиус $R = r$, а через время $T = t$ он стал равным $R = a(t) \cdot r$, где $a(t)$ — масштабный фактор, зависящий только от времени. Тогда скорости точек на поверхности шара относительно его центра:

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{da}{dt} r = \dot{a} r \quad (1.5)$$

Если учесть (1.4), получаем

$$v = HR = Har \Leftrightarrow \dot{a} r = Har \Leftrightarrow H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.6)$$

Постоянная Хаббла H_o - это значение параметра Хаббла H на данный момент (что обозначено индексом "o", а постоянство подразумевается в пространственном смысле). Подробнее: [расширение Вселенной](#), а также начало [вот этого видео](#)).

Наблюдаемое космологическое красное смещение иногда интерпретируется как доплеровское, однако такая интерпретация не точна: в частности, увеличение длины волны при космологическом красном смещении зависит не от скорости изменения $a(t)$ в моменты испускания или поглощения, а от увеличения $a(t)$ за весь период между испусканием и поглощением света. Таким образом, при доплеровском красном смещении длина волны увеличивается из-за относительного движения источника, а при космологическом - из-за расширения Вселенной и увеличения расстояния между объектами (Weinberg 2008). К счастью, такой путаницы нет с [гравитационным](#) красным смещением. Далее красное смещение подразумевается в космологическом смысле.

1.3 Расстояния в космологии

В космологии такая величина, как расстояние, неоднозначна из-за расширения Вселенной. Поэтому оно глобально понимается в двух смыслах: собственное (*proper*) и сопутствующее (*comoving*) расстояния. Источники: [W](#) и [туториал](#).

Собственное расстояние l_p - это расстояние, которое фотон прошёл от источника до нас. Можно сказать, что оно равно показаниям длинной линейки, протянутой от нас до источника. Оно меняется со временем, так как Вселенная расширяется. Его можно определить следующим образом:

$$l_p = \int_{t_1}^{t_0} c dt, \quad (1.7)$$

где t_1 - момент времени, соответствующий испусканию фотона, а t_0 - его наблюдению.

Сопутствующее расстояние l_c - это расстояние в системе отсчёта, расширяющейся вместе со Вселенной, и потому не изменяющееся во времени из-за расширения пространства. Оно связано с собственным расстоянием понятным образом:

$$l_c = \frac{l_p}{a(t)}, \quad (1.8)$$

где $a(t) \leq 1$ - масштабный фактор (см. 1.2); по определению $a(t_0) = 1$. Сопутствующее расстояние и собственное расстояние определяются таким образом, чтобы они были равны в настоящее время (но различны в любой момент времени, отличающийся от момента измерения).

Выразим l_c как функцию не времени, но красного смещения. Для этого немного преобразим формулу (1.1):

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \equiv \frac{1}{a(t)}, \quad (1.9)$$

где $a(t_0) = 1$ - масштабный фактор на момент наблюдения света от источника, $a(t)$ - на момент испускания света (нетрудно соотнести отношения масштабных факторов и длин волн). Можно выполнить простые преобразования:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = -\frac{\frac{da}{dt}}{a} \frac{1}{a} \stackrel{(1.6)}{=} -\frac{H(z)}{a}, \quad (1.10)$$

где запись $H(z)$ отражает факт зависимости H от времени и, соответственно, от красного смещения. Подставляя (1.7) в (1.8) и заноса $a(t)$ под знак интеграла, получаем:

$$l_c = \int_{t_1}^{t_0} c \cdot \frac{dt}{a(t)} \stackrel{(1.10)}{=} \int_0^{z_1} c \cdot \frac{dz}{H(z)}, \quad (1.11)$$

нижний предел интегрирования $z(t_0) = 0$, а верхний $z(t_1) = z_1$. Пропуская довольно громоздкий вывод, сразу запишем явное выражение, которое будет использоваться в дальнейшем:

$$H(z) = H_o \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (1.12)$$

(см. [Nogg 1999](#) по [ссылке](#)). О глубоком физическом смысле представленных здесь величин пока можно не задумываться и принять их константами, а именно: $H_o = 70$ км/с/Мпк, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ (это так называемые относительные плотности материи и тёмной энергии, численные значения которых приблизительно согласуют наблюдения и модель так называемой плоской Вселенной).

Далее будут рассмотрен способ определения расстояния по угловому размеру объектов. Кроме этого, расстояние можно определить и [по соотношению поток-светимость](#).

1.3.1 Угловое расстояние по диаметру

Если известен физический размер D удалённого источника (например, галактики; см. [картинку](#)), то можно записать очевидную связь между его угловым размером θ и расстоянием l до него:

$$\theta = \frac{D}{l} \quad (1.13)$$

Этот угловой размер не должен меняться со временем в силу закона Хаббла (т.к. в его силу треугольник с [картинки](#) выше будет при увеличении оставаться подобным самому себе). Значит, продольные и поперечные размеры в системе при расширении Вселенной будут увеличиваться пропорционально друг другу. На момент прилёта фотонов от источника к наблюдателю размер источника равен $D_1 = D/a(t_1)$, где t_1 соответствует моменту испускания фотона в прошлом (то есть тому моменту, когда поперечный размер источника был равен именно D ; при этом $D_1 > D$, т.к. $a(t_1) < 1$), а продольное расстояние на момент испускания фотона равно l_c . Тогда

$$l = \frac{D}{\theta} = \frac{D}{D_1/l_c} = \frac{D \cdot l_c}{D/a(t_1)} = a(t_1) \cdot l_c \quad (1.14)$$

Определяемое таким образом расстояние называется угловым расстоянием по диаметру (*angular diameter distance*) и обозначается как D_A . Запишем его в явном виде, используя выражения (1.9), (1.11) и (1.12):

$$D_A = \frac{1}{1+z_1} \int_0^{z_1} \frac{c}{H_o} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (1.15)$$

Чтобы подчеркнуть, что определяемое расстояние лежит между наблюдателем на $z = 0$ и источником на z_1 , можно уточнить: $D_A = D_A(0, z_1)$. Далее расстояние понимается именно в смысле углового расстояния по диаметру. График зависимости $D_A(0, z)$ изображен на Рис. 1. На этом же графике изображены зависимости от z расстояния из закона Хаббла как для малых скоростей (линейная зависимость), так и для релятивистских (асимптотическое стремление к значению $D_H = c/H$).

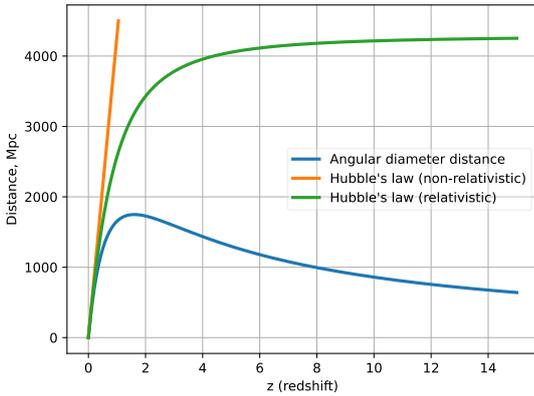


Рис. 1: Зависимость углового расстояния по диаметру D_A от красного смещения z для фиксированных параметров $H_o = 70$ км/с/Мпк, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$. Также на графике изображены расстояния, полученные из закона Хаббла (1.4) с выражениями для скоростей из (1.2) и (1.3).

Следует обратить внимание на поведение функции $D_A(0, z)$: сначала она растёт до $z_t \approx 1.5$ (точное значение определяется космологическими параметрами), а после него начинает убывать. Это означает, что угловой размер объекта, удаляющегося от нас, сначала уменьшается, а потом увеличивается, что, на первый взгляд, интуитивно кажется некорректным. Но никакого противоречия здесь нет: так, из-за конечной скорости света и расширения Вселенной мы видим источники большими, чем они на самом деле есть (так как, пока свет от них летел к нам, сами они успели

удалиться от нас). [Вот тут](#) представлено шикарное графическое объяснение этого.

Напоследок получим выражение для $D_A(z_1, z_2)$, то есть расстояния между объектами на красных смещениях z_1 и z_2 относительно нас (на $z = 0$). Для этого сначала получим выражение для z_{12} , то есть красного смещения источника на z_2 относительно источника на z_1 (может возникнуть желание просто вычесть одно из другого, но так делать нельзя):

$$1 + z_{12} \stackrel{(1.9)}{=} \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \stackrel{(1.9)}{=} \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \quad (1.16)$$

Правильно масштабируем продольные расстояния относительно $z = 0$:

$$\frac{D_A(0, z_2)}{a(t_2)} = \frac{D_A(0, z_1)}{a(t_1)} + \frac{D_A(z_1, z_2)}{a(t_2)}, \quad (1.17)$$

откуда

$$D_A(z_1, z_2) = D_A(0, z_2) - \frac{a(t_2)}{a(t_1)} D_A(0, z_1) = \stackrel{(1.16)}{=} D_A(0, z_2) - \frac{1 + z_1}{1 + z_2} D_A(0, z_1) \quad (1.18)$$

Для вывода использовалась [вот эта статья](#). Таким образом, с учётом (1.15) в общем виде имеем

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{1}{1 + z_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{H_o} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (1.19)$$

По сути, формула (1.15) является частным случаем этого выражения.

1.4 Тестовое задание

1. Напишите функцию (например, на Python) для определения расстояния D_A между двумя объектами во Вселенной. Входные параметры: красные смещения z_1 и z_2 источников, постоянная Хаббла H_o , плотности материи Ω_m и тёмной энергии Ω_Λ (для простоты можно рассмотреть случай Вселенной со значениями космологических параметров, указанными выше: $H_o = 70$ км/с/Мпк, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$).
2. Постройте график функции $D_A(0, z)$. Найдите значение глобального максимума этой функции.
3. На этом же графике построьте расстояние из закона Хаббла.

1.5 Упражнение

Определите угловой размер галактики, физический размер которой составляет 10 кпк (килопарсек). Пусть галактика находится на $z = 1, 2, 3$ (рассмотрите три варианта). Значения $H_o, \Omega_m, \Omega_\Lambda$ для вычисления расстояний возьмите выше.

2 Формализм

2.1 Введение

Гравитационное линзирование (далее для краткости просто ГЛ) - это отклонение света в гравитационном поле массивных тел. Данное явление активно используется в астрофизике и космологии, при этом оно может служить источником систематических ошибок при наблюдениях.

В рамках классической механики можно показать, что свет, будучи представленный как поток частиц (корпускул), двигающихся со скоростью света c , будет испытывать гравитационное влияние массивных объектов точно так же, как и обычные тела. Пусть фотон движется в поле тяготения точечной массы M с прицельным параметром b , тогда он отклонится на угол

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2 b}. \quad (2.1)$$

Подробный вывод этой формулы см. в Will 1988.

Как теоретически предсказал А. Эйнштейн в 1916 г., для правильного описания отклонения света в гравитационном поле необходимо учесть эффекты общей теории относительности. Тогда значение угла из формулы (2.1) увеличится вдвое:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (2.2)$$

Корректность именно этого выражения была впервые проверена при наблюдении полного солнечного затмения в 1919 году.

Строгий вывод этой формулы, предполагающий учёт метрики пространства-времени и умение варьировать функционал, а также знание таких понятий, как лагранжиан и уравнение Эйлера в аналитической механике, можно найти, например, в лекциях Meneghetti 2021 (ссылка). Чуть менее строгий вывод см. в Narayan и Bartelmann 1996 (ссылка).

2.2 Упражнение

Определите максимальный угол отклонения луча света в гравитационном поле Солнца. Ответ выразите в угловых микросекундах.

2.3 Классификация ГЛ

- Сильное гравитационное линзирование, вызывающее легко различимые искажения, такие как кольцо или крест Эйнштейна, дуги и множественные изображения. Далее речь пойдет именно об этом эффекте.
- Слабое гравитационное линзирование, вызывающее слабое искажение источников, которые находятся позади линзы. Его можно зафиксировать только после статистического анализа объектов фона, что позволяет найти небольшое согласованное искажение

их изображений. Проявляется в небольшом растяжении изображения перпендикулярно направлению к центру линзы.

- Микролинзирование, которое не вызывает видимых искажений формы, но может временно увеличивать или уменьшать количество света от источника.

2.4 Гравитационный потенциал

Путь света, распространяющегося от источника к наблюдателю, и испытывающего гравитационное линзирование, можно условно разделить на три части (см. Рис. 2). В первой свет движется по прямой от источника к некоторой точке вблизи линзы. Во второй части, гораздо менее протяжённой, чем первая, свет испытывает влияние гравитационного потенциала линзы, и отклоняется от первоначальной траектории. В третьей он снова движется по прямой от линзы к наблюдателю. Такой подход оправдан, если ньютоновский потенциал $\Phi \ll c^2$, что выполняется практически всегда (Narayan и Bartelmann 1996). Это же условие обеспечивает малость углов: при сильном линзировании углы отклонения света порядка угловых секунд.

Кроме того, в силу принципа эквивалентности сил гравитации и инерции Φ не зависит от массы тела, попавшего в гравитационное поле, откуда следует, что все фотоны отклоняются на один и тот же угол. Таким образом, сильное гравитационное линзирование ахроматично, то есть не зависит от длины волны, но только в вакууме. В неоднородной (или однородной, но обладающей дисперсией) среде, например, в космической плазме, угол отклонения света может зависеть от длины волны (см. вот эту работу): получается линзированная "радуга" (см. здесь).

2.5 Упражнения

1. Покажите, что у величин Φ и c^2 одинаковые размерности.
2. Скопления галактик - самые массивные гравитационно связанные объекты во Вселенной. Оцените порядок величины $|\Phi|/c^2$ для скопления с массой $2 \cdot 10^{15} M_{\odot}$ и поперечным размером 2 Мпк.

2.6 Углы и расстояния

В реалистичных моделях линз, в которых масса, вызывающая линзирование, распределена трёхмерным образом, используется приближение плоских линз по аналогии с геометрической оптикой. Это всегда оправдано: характерные размеры самого большого объекта, который может быть линзой, – скопления галактик – порядка 1 Мпк, в то время как продольные расстояния между объектами системы порядка 100 – 1000 Мпк.

Типичная ГЛ система изображена на Рисунке 2. На нём β и θ - углы между оптической осью (пунктирная линия, проходящая от наблюдателя к линзе и далее) и источником и его изображением соответственно, $\hat{\alpha}$ - угол отклонения светового луча, η и ξ - расстояния от оптической оси до источника и его изображения соответственно, D_d - расстояние между наблюдателем и плоскостью линзы, D_{ds} - между плоскостями линзы и источника, D_s - между наблюдателем и источником. Расстояния понимаются в смысле углового расстояния по диаметру: отсюда, в частности, следует, что в общем случае $D_s \neq D_d + D_{ds}$ (расстояние нелинейно зависит от красного смещения).

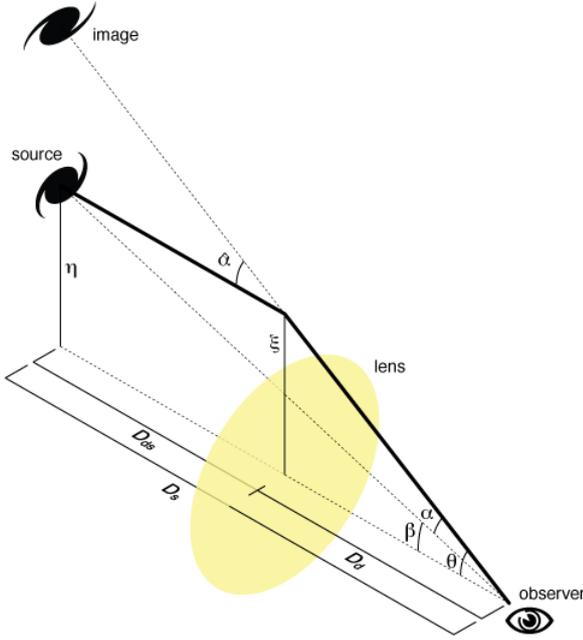


Рис. 2: Типичная гравитационно линзированная система (отсюда). Обозначения описаны в тексте.

Важно понимать, что углы $\hat{\alpha}$, β и θ , вообще говоря, являются векторными величинами, так как они отражают положение отрезков η и ξ относительно оптической оси. Далее в выражениях, в которых двумерность углов может иметь важное значение, они будут выделены жирным шрифтом: $\hat{\alpha}$, β и θ . За координаты этих углов можно принять, например, изменение прямых восхождений и склонений между концами отрезков.

2.7 Уравнение линзы

Из Рисунка 2 видно следующее соотношение:

$$\theta D_s = \beta D_s + \hat{\alpha} D_{ds}. \quad (2.3)$$

Все углы малые, поэтому можно смело пользоваться первым замечательным пределом и заменять тангенсы углов на их аргументы. После упрощения получаем

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}(\theta) = \theta - \alpha(\theta) \quad (2.4)$$

Такая связь хорошо видна на Рисунке 2. Это *уравнение линзы* в самом общем виде: никаких предположений о природе этой самой линзы пока сделано не было. Имеем только три угла: β , θ и $\alpha(\theta)$. Зависимость $\alpha(\theta)$ отражает особенности линзы.

2.8 Точечная линза

Рассмотрим самый простой случай, когда вся масса создающего гравитационное поле объекта сосредоточена в одной точке (такую ещё иногда называют линзой Шварцшильда). Далее будем пользоваться именно такой моделью. В выражение (2.2) вместо b подставим $\xi = D_d \cdot \theta$ (Рис. 2):

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi}, \quad (2.5)$$

Тогда уравнение линзы для точечной линзы:

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM}{c^2 \theta} \quad (2.6)$$

2.9 Радиус Эйнштейна

Введём характерную угловую величину:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}, \quad (2.7)$$

Нетрудно показать, что в кольцо именно такого радиуса вырождается точечный источник, расположенный строго за линзой, то есть, при $\beta = 0$. Эта величина называется радиусом Эйнштейна (иногда радиусом Эйнштейна-Хвольсона) и характеризует масштабы линзирования (безотносительно модели линзы). Для сильного линзирования он по порядку величины равен секунде дуги.

2.10 Поверхностная плотность

В силу допустимости приближения плоских линз можно спроецировать трёхмерную плотность на плоскость линзы. Пусть масса линзы распределена в пространстве по закону $\rho(\xi, z)$, где z - координата вдоль оптической оси. *Поверхностная плотность* вещества в линзе задаётся следующим соотношением:

$$\Sigma(\xi) = \int \rho(\xi, z) dz \quad (2.8)$$

2.11 Критическая плотность

Поверхностная плотность массы внутри окружности в плоскости линзы с радиусом Эйнштейна называется *критической плотностью*. Для точечной линзы она равна

$$\Sigma_{crit} = \frac{M}{\pi \xi^2} = \frac{M}{\pi (D_d \theta)^2} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (2.9)$$

2.12 Упражнения

1. Определите радиус кольца Эйнштейна для следующей конфигурации: точечный источник находится на красном смещении $z_2 = 1$, в роли линзы выступает галактика с массой $10^{12} M_\odot$ (масс Солнца) на красном смещении $z_1 = 0.5$. Постоянную Хаббла H_0 примите равной 70 км/с/Мпк , $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$.
2. Вычислите критическую плотность Σ_{cr} для случая из предыдущей задачи. Ответ запишите в $M_\odot/\text{пк}^2$ и в г/см^2 .

3 Моделирование

3.1 Решение уравнения линзы

В выражение 2.6 подставим 2.7 и получим, что

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (3.1)$$

Разделим обе части на θ_E и введём две безразмерные величины: $y = \beta/\theta_E$ (координата источника в его плоскости) и $x = \theta/\theta_E$ (координата изображения в плоскости линзы), откуда получим:

$$y = x - \frac{1}{x} \quad (3.2)$$

Это квадратное уравнение относительно x . Решая его, получаем два возможных положения изображений (относительно линзы в её плоскости):

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right] = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1} \quad (3.3)$$

Таким образом, в случае точечной линзы изображений всегда будет два – одно внутри кольца Эйнштейна (x_-) и одно снаружи (x_+). При неизменном $|y|$ не будут меняться $|x_-|$ и $|x_+|$, но при вращении источника относительно линзы его изображения будут вращаться вместе с ним так, что они все будут лежать на одной прямой (см. Рис. 3).

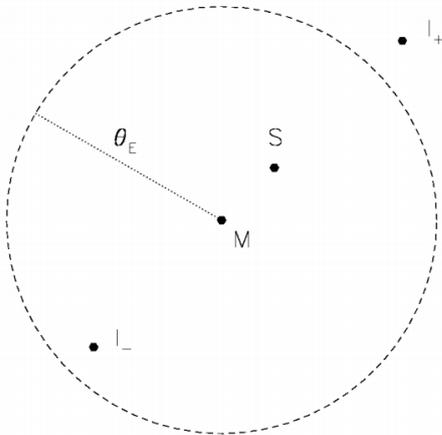


Рис. 3: Положение изображений в случае точечного источника (из Nagayan и Bartelmann 1996).

Можно записать это решение и с учётом размерностей углов (см. Nagayan и Bartelmann 1996). Но безразмерное решение гораздо удобнее промоделировать: все физические параметры (масса, расстояния) скрыты в нормировке, и радиус Эйнштейна равен единице.

3.2 Уточнение

Анализируя выражение (3.3), можно заметить, что при $y \rightarrow \infty$ изображения ведут себя так, что $x_+ \rightarrow y$, а $x_- \rightarrow 0$. Это значит, что при значительном удалении источника от линзы одно из изображений будет находиться там же, где и источник, что соответствует отсутствию линзирования. Второе изображение, которое формально находится там же, где и линза, тоже не будет наблюдаться: это связано с тем, что его яркость (см. далее) уменьшится до нуля.

3.3 Программирование – 1

1. Напишите программу, при помощи которой можно построить Рисунок 3. Реализуйте её таким образом, чтобы произвольные координаты источника S можно было задать самому, а положения изображений вычислялись бы на их основе. Желательно добиться того, чтобы источник можно было свободно двигать по плоскости.
2. Обобщите ваш код для неточечного источника, который состоит из совокупности многих точечных. Промоделируйте неточечный источник окружностью или кругом, добавьте возможность менять размер этой окружности. Для теста корректности можно посмотреть [сюда](#). Добавьте замощение окружности узором в клетку, чтобы нагляднее проиллюстрировать искажения.
3. Попробуйте в качестве источника взять заведомо несимметричный объект, например, изображение галактики ниже.

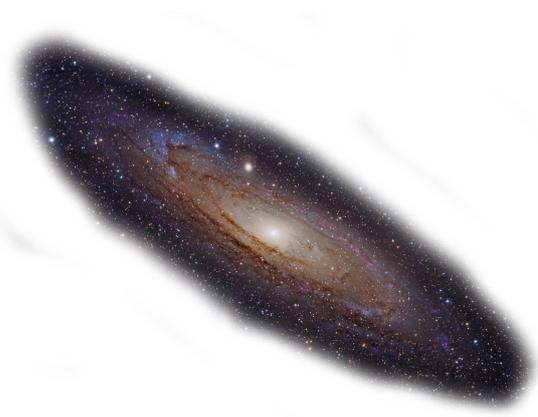


Рис. 4: Галактика

Ссылки по теме: [гифка](#), [симуляции](#), [видео](#).

3.4 Усиление изображений

Как уже было показано выше, при гравитационном линзировании искажаются положения, в которых мы видим источники света. Следующим этапом необходимо понять, как меняется видимая яркость изображений относительно яркости источника. Будем характеризовать разницу в яркости абсолютным усилением светового потока и рассматривать протяжённые источники.

У гравитационного линзирования есть особенность, связанная со свойствами распространения света: поверхностная яркость сохраняется. Это может быть контринтуитивно: казалось бы, нарушается закон сохранения энергии, ведь изображение с большей площадью должно быть более тусклым. Противоречие разрешается особенностями геометрической оптики, которые объясняются теоремой Лиувилля о сохранении фазового потока или, например, вторым законом термодинамики (в литературе есть более подробное объяснение данного феномена). Таким образом, в общем случае усиление μ изображения - это отношение его площади к площади источника:

$$\mu = \frac{S_{\text{изображения}}}{S_{\text{источника}}} \quad (3.4)$$

На не очень больших масштабах (если точнее, на таких, на которых размер источника много меньше характерных для изменений свойств линзы угловых размеров) ГЛ можно рассматривать как линейное отображение из плоскости источника в плоскость линзы: бесконечно малый элемент телесного угла $\delta\beta^2$ отображается в $\delta\theta^2$. Матрица, составленная из частных производных такого отображения, называется якобианом, а её определитель равен

$$\det A = \left| \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \right| = \left| \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right|, \quad (3.5)$$

где θ и β - знакомые нам координаты в плоскостях линзы и источника соответственно. Последний переход следует из ранее совершённой нормировки на радиус Эйнштейна. Здесь записана матрица перехода от координат в плоскости линзы к координатам в плоскости источника (хоть линзирование и "происходит" в другом направлении). В случае осевой симметрии (к которому относится линзирование на точечной линзе) и с учётом уравнения линзы получаем:

$$\det A = \frac{y}{x} \frac{\partial y}{\partial x} \stackrel{(3.2)}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 \quad (3.6)$$

Модуль якобиана по геометрическому смыслу совпадает с отношением площадей, то есть, усилением. Таким образом, усиление будет равно определителю матрицы, обратной к матрице выше:

$$\mu = \frac{1}{\det A} = \left[1 - \left(\frac{1}{x}\right)^4\right]^{-1} = \frac{x^4}{x^4 - 1} \quad (3.7)$$

Для полноты картины в последнем переходе произошёл возврат в размерные координаты. Из этого выражения следует, что абсолютное усиление изображений точечной линзы зависит только от их положений (они, в свою очередь, зависят только от положения источника). Анализируя выражение (3.7), можно заметить, что для $x_+ > 1$ $\mu_+ > 1$, то есть то изображение, которое лежит вне радиуса Эйнштейна, усиливается (это происходит на небольших расстояниях от линзы); также можно увидеть, что для $x_- < 1$ $\mu_- < 0$, то есть изображение, лежащее внутри радиуса Эйнштейна, формально имеет отрицательное усиление, что можно трактовать, как усиление в $|\mu_-|$ раз. Заметим также, что:

- при $x_+ \rightarrow \infty$ $\mu \rightarrow 1$, то есть поверхностная яркость не меняется (это соответствует отсутствию линзирования, см. раздел 3.2);
- при $x_- \rightarrow 0$ $\mu \rightarrow 0$, то есть яркость снижается до нуля (это означает, что изображение не наблюдается, также см. раздел 3.2);
- при $x \rightarrow 1 \pm 0$ $\mu_{\pm} \rightarrow \pm\infty$, то есть усиление изображений, которые находятся на кольце Эйнштейна формально бесконечно, но знак этой бесконечности зависит от того, подходим мы к $x = 1$ справа или слева. В реальности бесконечных усилений не наблюдается, так как любой источник на некотором масштабе обладает конечным размером.

3.5 Микролинзирование

Как было показано выше, радиус Эйнштейна, и, как следствие, характерное угловое расстояние между изображениями, сильно зависит от массы линзы. Сильное линзирование, о котором шла речь выше, происходит, например, на галактиках или скоплениях галактик. Но свет также может преломляться и в гравитационном поле гораздо менее массивных объектов, таких, как звёзды или даже экзопланеты (так называются планеты в других звёздных системах): в таком случае имеет место *микролинзирование*. Его масштабы в миллионы раз меньше сильного линзирования. Разрешить изображения, возникающие в результате микролинзирования, и увидеть искажения формы источника на данный момент невозможно, так как настолько точные телескопы ещё не изобрели. Но зато вполне возможно увидеть увеличение яркости от источника (как правило, кратковременное), вызванное микролинзированием. Объекты, на которых оно происходит, вполне можно рассматривать как точечные в силу их малости и компактности. По наблюдениям кривых блеска от систем, на которых происходит микролинзирование (для этого источник или линза должны двигаться относительно наблюдателя), можно сделать вывод об их строении: см. [анимации](#).

3.6 Упражнения

- Выразите усиление изображений точечного источника, линзированного на точечной линзе, как функцию только его положения y относительно линзы.
- Выразите полное усиление изображений в модели точечной линзы, которое по определению равно $|\mu_-| + |\mu_+|$, как функцию только положения источника y относительно линзы. Попробуйте сделать какие-нибудь выводы относительно минимальных относительных размеров источника, при котором изменение яркости при линзировании на нём будет достаточно заметно.
- Воспользуйтесь формулой Погсона и свяжите абсолютное усиление вследствие линзирования с изменением блеска источника. Рассмотрите частный случай источника, лежащего на кольце Эйнштейна.

3.7 Программирование – 2

1. Для вашей модели точечной линзы с неточечным источником рассчитайте абсолютное усиление изображений как отношение площадей под дугами-изображениями и площадью источника. Свяжите численное значение усиления с прозрачностью изображения или добавьте цветовую индикацию ("колорбар").
2. Добавьте расчёт усиления по формуле (3.7) и проверьте, что результат совпадает с п. 1. Продемонстрируйте, насколько усиливаются разные области одного и того же неточечного источника.
3. Попробуйте применить вашу модель для иллюстрации события микролинзирования. Поскольку она безразмерная, её можно использовать для моделирования линзирования на любых масштабах, не забывая, конечно же, о физических ограничениях. Двигая источник по прямой относительно линзы и меняя величину прицельного параметра, наблюдайте за изменением абсолютного усиления (или блеска). Сравните результат с [этой гифкой](#).

Как проверить, что всё работает правильно? Расположите источник достаточно далеко от линзы: тогда одно изображение будет практически совпадать с источником и иметь такую же яркость, а второе изображение будет практически совпадать с линзой и иметь нулевую яркость; можно в этот момент «отключить» изменение яркости и убедиться в том, что второе изображение будет действительно находиться около линзы.

3.8 Пояснение

Что вообще может быть точечными линзами? См. [STRONG GRAVITATIONAL LENSING BY SCHWARZSCHILD BLACK HOLES](#). Каковы границы применимости модели точечной линзы?

4 Планы на будущее

Позже этот документ будет дополнен следующими темами:

1. линзирующий потенциал;
2. оптические эксперименты по моделированию гравитационного линзирования;
3. временная задержка между изображениями;
4. более сложные модели линзы, например, линзы Чанга-Рейфсдала или сингулярная изотермическая сфера (SIS);
5. двойные линзы

Список литературы

- Hogg, David W. (май 1999). «Distance measures in cosmology». В: *arXiv e-prints*, astro-ph/9905116, astro-ph/9905116. DOI: [10.48550/arXiv.astro-ph/9905116](#). arXiv: [astro-ph/9905116 \[astro-ph\]](#).
- Hubble, Edwin (март 1929). «A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae». В: *Proceedings of the National Academy of Science* 15.3, с. 168–173. DOI: [10.1073/pnas.15.3.168](#).
- Meneghetti, Massimo (2021). *Introduction to Gravitational Lensing; With Python Examples*. Т. 956. DOI: [10.1007/978-3-030-73582-1](#).
- Narayan, Ramesh и Matthias Bartelmann (июнь 1996). «Lectures on Gravitational Lensing». В: *arXiv e-prints*, astro-ph/9606001, astro-ph/9606001. DOI: [10.48550/arXiv.astro-ph/9606001](#). arXiv: [astro-ph/9606001 \[astro-ph\]](#).
- Weinberg, Steven (2008). *Cosmology*.
- Will, Clifford M. (май 1988). «Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light». В: *American Journal of Physics* 56.5, с. 413–415. DOI: [10.1119/1.15622](#).